الوحدة العاشرة

توزيع ذي الحدّين والتوزيع الهندسي

The binomial and geometric distributions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١٠-١ تتذكر صيغة الاحتمالات لتوزيع ذي الحدين وتستخدمها، وتتعرف على المواقف العملية التي يكون فيها التوزيع تمثيلًا مناسبًا.

١٠-٢ تحسب التوقع والتباين لتوزيع ذي الحدَّين.

١٠-٣ تتذكر صيغة الاحتمالات للتوزيع الهندسي وتستخدمها، وتتعرف على المواقف العملية التي يكون فيها التوزيع تمثيلًا مناسبًا.

١٠-٤ تحسب توقع التوزيع الهندسي.



معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف الحادي عشر الوحدة التاسعة	تحسب القيمة المتوقعة لعدد ثابت من التجارب المستقلة إذا علمت احتمال وقوع حدث محدد.	١) رُمي حجرا نرد منتظمَين ٣٧٨ مرة. كم مرة تتوقع أن مجموع العددَين الظاهرَين أكثر من ٨؟
الصف الحادي عشر الوحدة الثامنة	تجد مفكوك ناتج ضرب عبارات جبرية. تستخدم مفكوك $(أ + ب)^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب.	٢) إذا علمت أن $(أ + ب)^{٣} = أ^{٣} + ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} + ب^{٣}$ فأوجِد الكسور الأربعة في مفكوك $\left(\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}\right)^{٣}$ وتأكد من أن المجموع يساوي ١

المفردات

نموذج رياضيّ **mathematical model**

توزيع ذي الحدَّين **binomial distribution**

التوزيع الهندسي **geometric distribution**

لماذا ندرس توزيع ذي الحدين والتوزيع الهندسي؟

يمكن استخدام التوزيعات الاحتمالية المنفصلة لإيجاد احتمالات التجارب العشوائية ذات المتغيرات المنفصلة (المتقطعة) والتي يكون لها ناتجان مستقلان فقط إما النجاح أو الفشل، ويكون احتمال النجاح فيها ثابتًا، فمثلًا: أعمال الاستثمارات قد تحقق ربحًا أو خسارة، وقد يكون المُدّعى عليه في قضية ما في المحكمة بريئًا أو مذنبًا؛ وأيضًا رمي الكرة في مباراة كرة السلة إما أن تدخل في السلة أو لا تدخل.

في الحياة اليومية نجد الكثير من المواقف التي تؤدّي إلى النجاح أو إلى الفشل، ولكن اعتماد النواتج على النتيجتين 'نعم/ لا' يسمح لنا أن نصف بعض المواقف باستخدام **نموذج رياضيّ mathematical model**.

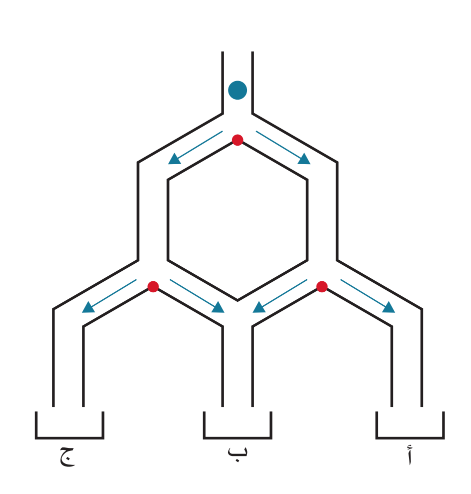
ومن النماذج المتعلقة بالمتغيرات العشوائية المنفصلة والتي تظهر نتيجة تكرار التجارب المستقلة حين يكون احتمال النجاح ثابتًا هما:

- **توزيع ذي الحدَّين binomial distribution**، ويستخدم لتمثيل عدد النجاحات لعدد ثابت من التجارب المستقلة.
- **التوزيع الهندسي geometric distribution**، ويستخدم لتمثيل عدد من التجارب حتى حدوث أول نجاح لعدد غير منتهٍ من التجارب المستقلة.

١٠-١ توزيع ذي الحدّين

استكشف ١

في هذا النشاط نستقصي سلسلة من التجارب التي تعطي كل منها أحد الناتجَين الممكنَين.

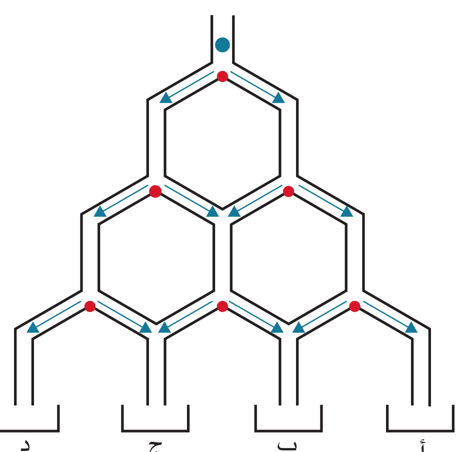


أُسقطت كرة من أعلى الجهاز المبيّن في الشكل.

عندما تلامس الكرة المسمار المبيّن بالنقطة الحمراء، فسيكون هناك ناتجان لهما فرصة الحدوث نفسها؛ سقوط الكرة يمينًا أو يسارًا.

استخدم الرمزَين: ر ليشير إلى اليسار، ن ليشير إلى اليمين، سجّل النتائج على طول المسار حتى تسقط الكرة في كل من الكؤوس أ، ب، ج.

استخدم النتائج لتكوّن جدول احتمالات لكرة تسقط في كل كأس. اكتب كل احتمال بصورة كسر مقامه ٤



يبيّن الشكل جهازًا مشابهًا مع أربعة كؤوس أ، ب، ج، د.

سجّل النتائج على طول المسار حتى تسقط الكرة في كل من الكؤوس أ، ب، ج، د

استخدم النتائج لتكوّن جدول احتمالات لكرة تسقط في كل كأس. اكتب كل احتمال بصورة كسر مقامه ٨

هل يمكنك أن تفسر السؤال: كيف ولماذا تكون القيم $\left(\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ ، $\left(\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}\right)^{٣}$ مرتبطة مع الاحتمالات التي تظهر في الجدولين اللذين كونتهما؟

إذا كان جهاز ما مكوّنًا من سلسلة من ١٠ مسامير بأربعة صفوف، فأنشئ جدول احتمالات لسقوط الكرة في كل كأس من الكؤوس الخمسة أ، ب، ج، د، هـ.

يعتبر توزيع ذي الحدين أحد أهم نماذج التوزيع الاحتمالي المنفصل حيث تتحقق فيه شروطه كما في المثال الآتي:

لنفترض أننا أجرينا تجربة حيث رُميت أربعة أحجار نرد منتظمة ذات ستة أوجه.

في كل محاولة مستقلة (الأربع رميات) نحصل على: ٠ أو ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ مرات على العدد ٦

ليكن ر عدد مرات ظهور العدد ٦ فيكون ر $\in$ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}.

الحصول على العدد ٦ يعتبر حدث النجاح، س تمثل حدث فشل الحصول على العدد ٦ وتكون احتمال نجاح واحتمال فشل كل محاولة كالآتي:

ل(نجاح) = ل(٦) = $\frac{١}{٦}$؛ و ل(فشل) = ل(س) = ١ − $\left(\frac{١}{٦}\right)$ = $\frac{٥}{٦}$



نحسب احتمالات ل(ر) لجميع قيم ر كما في الجدول الآتي:

ر	نتائج التجربة	عدد النتائج	ل(ر)
٠	(س، س، س، س)	$\binom{٤}{٠} = ١$	$\binom{٤}{٠}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٠}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤}$
١	(٦، س، س، س) ، (س، ٦، س، س) ، (س، س، ٦، س)، (س س س ٦)	$\binom{٤}{١} = ٤$	$\binom{٤}{١}\left(\frac{١}{٦}\right)^{١}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٣}$
٢	(٦ ،٦، س، س) ، (٦، س، ٦، س) ، (٦، س، س، ٦) ، (س، ٦ ،٦، س) ، (س، ٦، س، ٦) ، (س، س، ٦ ،٦)	$\binom{٤}{٢} = ٦$	$\binom{٤}{٢}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٢}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٢}$
٣	(٦ ،٦ ،٦، س) ، (٦، ٦، س. ٦) ، (٦، س، ٦ ،٦) ، (س، ٦ ،٦ ،٦)	$\binom{٤}{٣} = ٤$	$\binom{٤}{٣}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٣}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{١}$
٤	(٦ ،٦ ،٦ ،٦)	$\binom{٤}{٤} = ١$	$\binom{٤}{٤}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٤}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٠}$

مُساعَدة

كل محاولة للحصول على أي عدد من ١ إلى ٦ لها احتمالية الحدوث نفسها.

نلاحظ من الجدول أن ل(ر) = $\binom{٤}{ر}\left(\frac{١}{٦}\right)^{ر}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤-ر}$. هذه الاحتمالات هي حدود في ذي الحدَّين $\left(\frac{١}{٦} + \frac{٥}{٦}\right)^{٤}$.

باستخدام الرمز $\binom{ن}{ر}$ نجد الاحتمالات في الجدول السابق باستخدام الصيغة

$$ل(ر) = \binom{٤}{ر}\left(\frac{١}{٦}\right)^{ر}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤-ر}$$

مُساعَدة

الرمز الأكثر استخدامًا عند إيجاد مفكوك ذي الحدَّين هو $\binom{ن}{ر}$.

المتغيّر العشوائي المنفصل الذي تتوفر فيه الشروط الآتية يتبع توزيع ذي الحدَّين:

- يوجد ن تجربة مكررة مستقلة.
- قيمة ن محدودة.
- لكل تجربة ناتجان ممكنان فقط (نجاح و فشل).
- احتمال النجاح في كل محاولة ثابت وهو ب

المتغيّر العشوائي المنفصل س يتبع توزيع ذي الحدَّين ويشار إليه بـ س ~ ث (ن، ب).

مُساعَدة

س ~ ث (ن، ب) تعني: المتغير العشوائي س يتبع توزيع ذي الحدين ث (ن، ب)، حيث ث هو التوزيع ذي الحدين، ن هو عدد التجارب واحتمال النجاح في كل تجربة هو ب

نتيجة ١

إذا كان س ~ ث (ن، ب) فإن احتمال ر نجاح هو ل(ر) = $\binom{ن}{ر}$ $ب^{ر}(١ - ب)^{ن-ر}$ حيث ن عدد صحيح موجب، ر = ٠، ١، ٢، ....، ن

فمثلًا إذا كان المتغيّر س ~ ث (٣، ب)، فإن س ∈ {٠، ١، ٢، ٣}، وتكون لدينا الاحتمالات الآتية:

$ل(س = ٠) = \binom{٣}{٠} \times ب^{٠} \times (١ - ب)^{٣} = ١(١ - ب)^{٣}$

$ل(س = ١) = \binom{٣}{١} \times ب^{١} \times (١ - ب)^{٢} = ٣ب^{١}(١ - ب)^{٢}$

$ل(س = ٢) = \binom{٣}{٢} \times ب^{٢} \times (١ - ب)^{١} = ٣ب^{٢}(١ - ب)^{١}$

$ل(س = ٣) = \binom{٣}{٣} \times ب^{٣} \times (١ - ب)^{٠} = ١ب^{٣}$

مُساعَدة

قيم $\binom{ن}{ر}$ هي معاملات حدود ذي الحدَّين وتعطي عدد طرق حصول على ر نجاحًا في تجربة مكررة ن مرة. $ب^{ر}(١ - ب)^{ن-ر}$ هو احتمال لكل طريقة نحصل فيها على ر نجاحًا و(ن − ر) فشلًا.

مُساعَدة

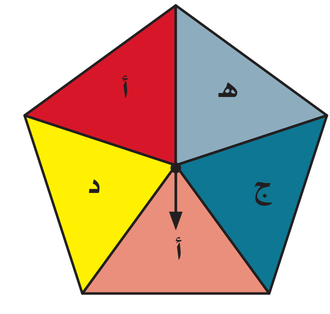
معاملات حدود ذي الحدَّين للقوة ٣ هي: ١، ٣، ٣، ١

تذكير

عرفت في الدرس ٣ من الوحدة الثامنة أن $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن - ر)!}$

مثال ١

يبيّن الشكل المجاور قرصًا دوّارًا خماسيًا منتظمًا. إذا دُوّر القرص ١٠ مرات، فأوجِد احتمال أن يتوقف المؤشر عند الحرف أ ثلاث مرات.



الحــلّ:

احتمال أن يتوقف المؤشر عند الحرف أ هو ب = $\frac{٢}{٥}$ = ٠,٤

١ − ب = $\frac{٣}{٥}$ = ٠,٦

فيكون س ~ ث (١٠، ٠,٤)

$ل(س = ٣) = \binom{١٠}{٣} \times (٠,٤)^{٣} \times (٠,٦)^{٧}$

$= \frac{١٠!}{٣! \times ٧!} \times (٠,٤)^{٣} \times (٠,٦)^{٧}$

= ٠,٢١٥ لأقرب ٣ أرقام معنوية

مثال ٢

إذا علمت أن س ~ ث (٨، ٠,٧)، فأوجِد ل(س > ٦)، لأقرب ٣ أرقام معنوية.

الحــلّ:

س ~ ث (٨، ٠,٧): ن = ٨، ب = ٠,٧، ١ − ب = ٠,٣

وعليه، يكون س ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

ل(س > ٦) = ل(س = ٧) + ل(س = ٨)

$= \binom{٨}{٧} \times (٠,٧)^{٧} \times (٠,٣)^{١} + \binom{٨}{٨} \times (٠,٧)^{٨} \times (٠,٣)^{٠}$

= ٠,١٩٧٦٥٠٣٢ + ٠,٠٥٧٦٤٨٠١

= ٠,٢٥٥

مُساعَدة

إجراء تقريب قيمة الاحتمالات مسبقًا خلال الحل يقود إلى إجابة غير صحيحة، كما في هذا المثال:

٠,١٩٨ + ٠,٠٥٧٦ = ٠,٢٥٦ كما يمكن استخدام الآلة الحاسبة كخطوة واحدة لإجراء العمليات مرة واحدة ثم تقريب الناتج النهائي.

مثـــال ٣

في بلد ما ٨٥٪ من السكان يحملون العامل الرايزيسي الموجب (R+).
أوجد احتمال أن يكون أقل من ٣٩ شخصًا من عيّنة عشوائية من ٤٠ شخصًا يحملون العامل الرايزيسي الموجب.

الحـــلّ:

افترض أن المتغيّر العشوائي س هو عدد الأشخاص الذين يحملون العامل الرايزيسي (R+) فيكون س ~ ث (٤٠، ٠,٨٥)

ل(س < ٣٩) = ١ − [ل(س = ٣٩) + ل(س = ٤٠)]

$= ١ - \left[\binom{٤٠}{٣٩} \times (٠,٨٥)^{٣٩} \times (٠,١٥)^{١} + \binom{٤٠}{٤٠} \times (٠,٨٥)^{٤٠} \times (٠,١٥)^{٠}\right]$

= ٠,٩٨٨ لأقرب ٣ أرقام معنوية

مُساعَدة

يمكن إيجاد ل(س < ٣٩) = ل(٠) + ل(١) + ... + ل(٣٨) من خلال توظيف برامج تفاعلية مثل Geogebra لحساب هذا الاحتمال

مثـــال ٤

إذا علمت أن س ~ ث (ن، ٠,٤)، ل(س = ٠) < ٠,١، فأوجِد أقل قيمة ممكنة لـ ن.

الحـــلّ:

$ل(س = ٠) = \binom{ن}{٠} \times (٠,٤)^{٠} \times (٠,٦)^{ن} = (٠,٦)^{ن}$ — أوجِد ل(س = ٠) بدلالة ن

فيكون $(٠,٦)^{ن} < ٠,١$

لـو $(٠,٦)^{ن} <$ لـو ٠,١ — نحصل على المتباينة التي يمكن حلها باستخدام لـو١٠

ن لـو (٠,٦) < لـو ٠,١

−٠,٢٢٢ ن < −١

$ن > \frac{-١}{-٠,٢٢٢}$ — تم قلب إشارة المتباينة بسبب القسمة على عدد سالب

ن > ٤,٥٠

ن = ٥ أقل قيمة ممكنة لـ ن — نبحث عن أصغر عدد صحيح أكبر من ٤,٥ وهو ٥

طريقة بديلة:

باستخدام المحاولة والخطأ (خمّن وتحقق)

$(٠,٦)^{١} = ٠,٦$ ، $(٠,٦)^{٢} = ٠,٣٦$

$(٠,٦)^{٣} = ٠,٢١٦$ ؛ $(٠,٦)^{٤} = ٠,١٢٩٦$ ؛ $(٠,٦)^{٥} = ٠,٠٧٧٧٦$

أقل قيمة لـ ن = ٥

مُساعَدة

قيمة لوغاريتم أي كسر عشري بين ٠ و ١ تكون سالبة دائمًا.

مُساعَدة

ن تأخذ قيمًا صحيحة موجبة فقط

تمارين ١٠-١

١) إذا كان المتغير س يتبع توزيعًا ذا حدَّين حيث ن = ٤، ب = ٠,٢، فأوجد:

أ ل(س = ٤) ب ل(س = ٠) ج ل(س = ٣) د ل(س = ٣ أو ٤)

٢) إذا علمت أن ص ~ ث (٧، ٠,٦)، فأوجد:

أ ل(ص = ٧) ب ل(ص = ٥) ج ل(ص ≠ ٤) د ل(٣ > ص > ٦)

٣) إذا علمت أن ح ~ ث (٩، ٠,٣٢)، فأوجد:

أ ل(ح = ٥) ب ل(ح ≠ ٥) ج ل(ح > ٢) د ل(٠ > ح > ٩)

٤) أوجِد احتمال كل حدث من الأحداث الآتية:

أ ظهور خمس صور عند رمي قطعة نقد منتظمة تسع مرات.

ب ظهور العدد ٦ مرتَين عند رمي حجر نرد منتظم ١١ مرة.

٥) ينجح في اختبار القيادة ٧٠ ٪ من الأشخاص من المحاولة الأولى. أوجِد احتمال أن ينجح خمسة أشخاص اختيروا عشوائيًا من بين ٨ أشخاص تقدموا للاختبار لأول مرة.

٦) فرصة لاعب كرة قدم للتسجيل في كل ضربة جزاء هي ٩٥٪. أوجِد احتمال:

أ أن يُسجل جميع ضربات الجزاء الـ ١٠ التالية.

ب يفشل في تسجيل واحدة من سبع ضربات جزاء التالية.

٧) معدل فشل زراعة بذور نوع معيّن من الطماطم هو ١٣٪ خلال ١٠ أيام من زراعتها. أوجِد احتمال أن تنجح زراعة ٣٤ أو ٣٥ بذرة اختيرت عشوائيًا من ٤٠ بذرة خلال ١٠ أيام من زراعتها.

٨) ينتج مصنع ألواح دوائر إلكترونية ومعدل وجود خطأ فيها ٠,٣ ٪ . أوجِد احتمال أن يحصل في عيّنة عشوائية من ٢٠٠ لوح:

أ خطأ في لوح واحد فقط.

ب خطأ في أقل من لوحَين.

١٠-٢ التوقع والتباين لتوزيع ذي الحدّين

التوقع (الوسط) مقياس للنزعة المركزية، والانحراف المعياري هو مقياس التشتت لتوزيع ذي الحدَّين.

افترض أن س ~ ث (٢، ٠,٦)، التوزيع الاحتمالي مبيّن في الجدول الآتي:

س	٠	١	٢
ل (س)	٠,١٦	٠,٤٨	٠,٣٦


تطبيق صيغ ت(س)، ع^{٢}(س) يعطي النتائج التالية:

ت(س) = $\sum$ س ل = (٠ × ٠,١٦) + (١ × ٠,٤٨) + (٢ × ٠,٣٦) = ١,٢

ع^{٢}(س) = $\sum$ س^{٢} ل(س) − ت(س)^{٢} = (٠^{٢} × ٠,١٦) + (١^{٢} × ٠,٤٨) + (٢^{٢} × ٠,٣٦) − (١,٢)^{٢} = ٠,٤٨

تتكون التجربة من محاولتَين (ن = ٢)، واحتمال النجاح هو ب = ٠,٦ وعليه يمكن أن تكون قيمة ت (س) = ن ب = ٢ × ٠,٦ = ١,٢

كما يمكننا أن نوجد تباين المتغير س الذي يمكن أن نجده بدلالة ن، ب كما يأتي:

ع^{٢}(س) = ن ب (١ − ب) = ٢ × ٠,٦ × ٠,٤ = ٠,٤٨

تذكير

درسنا في الدرس ٦ من الوحدة ٩ أن القيمة المتوقعة هي قيمة معدل المتغير لعدد كبير من التجارب.

نتيجة ٢

الوسط الحسابي والتباين للتوزيع س ~ ث (ن، ب)

التوقع (الوسط الحسابي) هو ت(س) = ن ب، والتباين هو ع^{٢}(س) = ن ب (١ − ب)

مثـــال ٥

إذا علمت أن س ~ ث (١٢، ٠,٣)، فأوجد الوسط الحسابي، والتباين، والانحراف المعياري لـ س (مقربًا لأقرب ٣ أرقام معنوية).

الحـــلّ:

ت(س) = ن ب

= ١٢ × ٠,٣

= ٣,٦

تباين(س) = ع^{٢}(س) = ن ب(١ − ب)

= ١٢ × ٠,٣ × ٠,٧

= ٢,٥٢

الانحراف المعياري = ع(س) = $\sqrt{\text{ن ب(١ − ب)}}$

= $\sqrt{٢,٥٢}$

= ١,٥٩

مثـــال ٦

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي س ~ ث (ن، ب). إذا علمت أن ت(س) = ١٢، $ع^٢$(س) = ٧,٥ فأوجِد:

أ قيمة ن، وقيمة ب

ب ل(س = ١١).

الحـــلّ:

∵ ت (س) = ن ب = ١٢

$ع^٢$(س) = ن ب (١ − ب) = ٧،٥

أ ١ − ب = $\frac{٧,٥}{١٢}$ = ٠,٦٢٥ ...... استخدم $\frac{ع^٢(س)}{ت(س)} = \frac{ن ب(١ - ب)}{ن ب}$ لتجد ب.

ب = ١ − ٠,٦٢٥ = ٠,٣٧٥

ن = $\frac{١٢}{٠,٣٧٥}$ = ٣٢ ...... ت(س) = ن ب، فيكون ن = $\frac{ت(س)}{ب}$

ب ل(س = ١١) = $\binom{٣٢}{١١} \times (٠,٣٧٥)^{١١} \times (٠,٦٢٥)^{٢١}$ ...... س ~ ث (٣٢، ٠,٣٧٥).

= ٠,١٣٨ مقرب لأقرب ٣ أرقام معنوية

تمارين ١٠-٢

١) في كل مما يأتي: احسب القيمة المتوقعة، والتباين، والانحراف المعياري لكل متغير عشوائي منفصل من الآتي مقربًا الناتج لأقرب ٣ أرقام معنوية:

أ ح ~ ث (٥، ٠,٢)

ب ط ~ ث (٢٤، ٠,٥٥)

ج س ~ ث (٣٦٥، ٠,١٨)

د ص ~ ث (٢٠، $\sqrt{٠,٥}$)

٢) إذا علمت أن س ~ ث (٨، ٠,٢٥)، فاحسب:

أ ت(س)

ب $ع^٢$(س)

ج ل(س) = ت(س))

د ل(س < ت(س))

٣) إذا علمت أن ص ~ ث (١١، ٠,٢٣)، فاحسب:

أ ل(ص ≠ ٣)

ب ل(ص < ت(ص))

٤) إذا علمت أن س ~ ث (ن، ب)، ت(س) = ٢٠، $ع^٢$(س) = ١٢، فأوجِد:

أ قيمة كل من ن، ب

ب ل(س = ٢١)

٥) إذا علمت أن المتغير ف يتبع توزيعًا ذا حدَّين حيث ت(ف) = ٢,٧، و $ع^٢$(ف) =٠,٢٧

أ أوجِد قيم ن، ب

ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ف.

٦) كل من المواقف الآتية لا تمثل توزيعًا ذي حدَّين. ما السبب؟

أ س هو طول أطول شخص عند اختيار ثلاثة أشخاص عشوائيًا من مجموعة مكونة من ١٠ أشخاص.

ب س هو عدد البنات اللاتي تم اختيارهن عندما نختار طفلَين عشوائيًا من مجموعة مكونة من بنت وثلاثة أولاد.

ج س هو عدد الدراجات المختارة عند اختيار أربع مركبات عشوائيًا من موقف مركبات فيه ١٣٤ سيارة صغيرة، و ١٧ حافلة، و ٩ دراجات.

٧) المتغير العشوائي ح ~ ث (١٩٢، ب)، ت (ح) يساوي ٢٤ ضعف الانحراف المعياري للمتغير ح . احسب قيمة ب، وقيمة ك، إذا علمت أن ل(ح = ٢) = ك × $٢^{-٣٧٩}$

٨) يحتوي صندوق على ٤٦٢ عود ثقاب، ويقدر أن ١,٣٪ منها تالفة.

أ احسب العدد المتوقع لأعواد الثقاب التالفة في الصندوق.

ب احسب تباين عدد أعواد الثقاب التالفة، وتباين عدد الأعواد الصالحة في صندوق ما.

ج بيّن على وجه التقريب أن ١٠,٤٪ من صناديق أعواد الثقاب تحتوي على ثمانية أعواد تالفة فقط.

د احسب احتمال أن يحتوي أحد الصناديق على الأقل من عيّنة من صندوقَين على ثمانية أعواد ثقاب تالفة فقط.

١٠-٣ التوزيع الهندسي

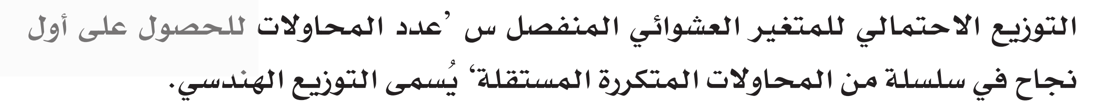
في تجربة رمي، نرمي حجر نرد للحصول على الرقم ٦، ما إمكانية الحصول على الرقم ٦ من أول مرة نرمي فيها حجر النرد؟ ثم الحصول على الرقم نفسه من ثاني مرة نرمي فيها حجر النرد؟ ثم من ثالث مرة نرمي فيها حجر النرد؟ وهكذا...

نجيب عن السؤال باستخدام احتمال النجاح والفشل الثابت: ب، ١ − ب.

ل(أول ٦ من أول رمية) = ب ← نجاح.

ل(أول ٦ من ثاني رمية) = (١ − ب)ب ← فشل تبعه نجاح.

ل(أول ٦ من ثالث رمية) = $(١ - ب)^{٢}$ب ← فشل مرتَين يتبعهما نجاح.



التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل س 'عدد المحاولات للحصول على أول نجاح في سلسلة من المحاولات المتكررة المستقلة' يُسمى التوزيع الهندسي.

يبيّن الجدول الآتي احتمال حدوث أول نجاح عند المحاولة 'ر':

ر	١	٢	٣	٤	....	ن	....
ل(ر)	ب	ب(١ − ب)	ب$(١ - ب)^{٢}$	ب$(١ - ب)^{٣}$	....	ب$(١ - ب)^{ن-١}$	....

تمثّل قيم ل(ر) في الجدول السابق حدود متتالية هندسية أول حدّ فيها ب وأساسها (١ − ب). مجموع الاحتمالات يساوي متسلسلة هندسية لانهائية.

$$\sum ل(س = ر) = ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{ب}{١ - (١ - ب)} = ١$$

مجموع احتمالات التوزيع الاحتمالي الهندسي يساوي ١

> **مُساعَدة**
>
> $ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$، حيث
> أ = الحدّ الأول
> ر = الأساس، −١ < ر < ١

يكون للمتغير العشوائي المنفصل س المعرّف بالمتغيّر ب توزيع هندسي إذا حقق الشروط الآتية:

- المحاولات المكررة مستقلة.
- يمكن أن يكون عدد المحاولات المكررة لانهائيًا.
- هناك ناتجان ممكنان لكل محاولة (نجاح و فشل).
- احتمال النجاح في كل محاولة ثابت، وهو ب.

> **نتيجة ٣**
>
> يرمز للمتغير العشوائي س ذي التوزيع الهندسي بالرمز س ~ هندسي (ب)، واحتمال حدوث أول نجاح هو في المحاولة رقم ر هو $ب_{ر}$ = ب$(١ - ب)^{ر-١}$، ر = ١، ٢، ٣، ...

> **مُساعَدة**
>
> صورة بديلة لهذه الصيغة:
> ل(س=ر)=$(١-ب)^{ر-١}$×ب.
> حيث أن ر − ١ يمثل عدد مرات الفشل قبل أول نجاح.

نلاحظ أن الفرق الجوهري بين التوزيعين ذي الحدين والهندسي هو أن عدد التجارب (المحاولات) في التوزيع ذي الحدَّين ثابت من البداية، ويمكن عدّ مرات النجاح، بينما في التوزيع الهندسي تتكرر المحاولات حتى يتم حدوث أول نجاح.

في التوزيع س ~ ث (ن، ب) يوجد $\binom{ن}{ر}$ طريقة للحصول على ر نجاحًا.

في التوزيع س ~ هندسي (ب) يوجد طريقة واحدة للحصول على أول نجاح بعد ر محاولة، أي عند حدوث ر − ١ فشل أُتبعت بنجاح واحد.

تذكير
درست في الوحدة الثامنة أن: $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن - ر)!}$

مثـــال ٧

وجد في محاولات مستقلة مكررة أن احتمال النجاح في كل محاولة ٠,٦٦. أوجِد احتمال حدوث أول نجاح لأقرب ٣ ارقام معنوية:

أ في المحاولة الثالثة.

ب قبل المحاولة الثالثة.

ج بعد المحاولة الثالثة.

الحــلّ:

أ ل(س = ٣) = ب(١ − ب)^{٢}
= ٠,٦٦ × (٠,٣٤)^{٢}
= ٠,٠٧٦٣

ليكن س عدد المحاولات حتى حدوث النجاح الأول. فيكون التوزيع هندسيًا س ~ هندسي (٠,٦٦). حيث ب = ٠,٦٦، ١ − ب = ٠,٣٤

ب ل(س ⩽ ٢) = ل(س = ١) + ل(س = ٢)
= ب + ب(١ − ب)
= ٠,٨٨٤

ج ل(س > ٣) = ١ − ل(س ⩽ ٣)
=١ − (ل(س = ٣) + ل (س ⩽ ٢))
= ١ − [٠,٨٨٤ + ٠,٠٧٦٣]
= ٠.٠٣٩٧

في الجزئية (أ) وجدنا الاحتمال لـ ٣ محاولات.
في الجزئية (ب) وجدنا الاحتمال لـ أقل من ٣ محاولات.
بالنسبة إلى الجزئية (ج)، وهو احتمال للحدث أن يكون أكبر من ٣، يمكننا أن نحسبه باستخدام ١ − (الناتج في الجزئية (أ) + الناتج في الجزئية (ب))

يمكن أن تحسب الاحتمالات التي تتضمن متباينات بأن تجد المجموع لقيم صغيرة لـ ر. كما في الجزئيتَين ب، ج من المثال ٧، إلّا أنه لقيم ر الكبيرة فإننا نستخدم النتيجة الآتية:

نتيجة ٤

عندما س ~ هندسي (ب)، إذًا، فإن:
- ل(س ⩽ ر) = ١ − (١ − ب)^{ر}
- ل(س > ر) = (١ − ب)^{ر}

مثــال ٨

في بلد ما، ١٨٪ من البالغين يضعون عدسات طبية. اختير عدد من البالغين عشوائيًا وتم مقابلتهم واحدًا واحدًا. أوجِد احتمال أن أول شخص يضع عدسة طبية هو:

أ واحد من أول ١٥ شخصًا تمّت مقابلتهم.

ب لم يكن من أول تسعة أشخاص تمّت مقابلتهم.

الحــلّ:

أ ل(س ⩽ ١٥) = ١ − (١ − ب)^{١٥}

= ١ − (٠,٨٢)^{١٥}

= ٠,٩٤٩

س يمثل عدد البالغين الذين تمّ مقابلتهم حتى تمّ مقابلة أول شخص يضع عدسات طبية
س ~ هندسي (٠,١٨)،
(١ − ب) = ١ − ٠,١٨ = ٠,٨٢

ب ل(س > ٩) = (١ − ب)^{٩}

= (٠,٨٢)^{٩}

= ٠,١٦٨

مثــال ٩

عملة معدنية غير منتظمة، احتمال ظهور الصورة في كل رمية يساوي $\frac{٥}{١١}$. رُميت العملة المعدنية حتى ظهرت الصورة لأول مرة. أوجِد احتمال أن تكون العملة قد رُميت:

أ على الأقل ست مرات.

ب أقل من ثماني مرات.

الحــلّ:

أ ل(س ⩾ ٦) = ل(س > ٥)

= (١ − ب)^{٥}

= $\left(\frac{٦}{١١}\right)^{٥}$

= ٠,٠٤٨٣

عبارة 'ست مرات على الأقل' تعني س > ٥
افترض أن س يمثل عدد المرات التي رُميت بها العملة حتى ظهرت الصورة. ويكون التوزيع الاحتمالي س ~ هندسي $\left(\frac{٥}{١١}\right)$، (١ − ب) = $\frac{٦}{١١}$

ب ل(س < ٨) = ل(س ⩽ ٧)

= ١ − (١ − ب)^{٧}

= ١ − $\left(\frac{٦}{١١}\right)^{٧}$

= ٠,٩٨٦

عبارة 'أقل من ثماني مرات' تعني 'سبع مرات وأقل'

تمارين ١٠-٣

١) إذا علمت أن المتغير العشوائي المنفصل توزيعه الاحتمالي س ~ هندسي (٠,٢)، فأوجِد:

أ ل(س = ٧) ب ل(س ≠ ٥) ج ل(س > ٤)

٢) يُخطئ علي، ويعطي الفريق الخصم ضربة جزاء في كل ست مباريات كرة قدم يشارك فيها. أوجد احتمال أن تكون ضربة الجزاء التالية التي يتسبب بها علي:



أ في المباراة الثامنة التي يشارك فيها.

ب بعد المباراة الرابعة التي يشارك فيها.

٣) رُقّمت الأوجه الخمسة لقرص دوّار منتظم بالأرقام ١، ١، ٢، ٣، ٤. دُوّر القرص عددًا من المرات حتى ظهر الرقم ١. أوجِد احتمال أن يكون قد دُوّر:

أ مرتَين فقط.

ب على الأكثر خمس مرات.

ج على الأقل ثماني مرات.

٤) احتمال أن تكون وحدة تالفة من إنتاج مصنع ما ٠,٠٧. اختير عدد من وحدات الإنتاج عشوائيًا، واختُبرت صلاحيتها.

أ أوجِد احتمال أن تكون أول وحدة تالفة:

١) هي الوحدة رقم ١٢

٢) ليست من أول ١٠ وحدات اختُبرت.

٣) واحدة من أول ٨ وحدات اختُبرت.

ب ما الفرضية التي كوّنتها حول ظهور وحدات تالفة تمكنك من أن تحسب الاحتمالات في الجزئية (أ)؟

٥) ١٤٪ من المركبات هي شاحنات نقل بضائع. تقف فتاة على جسر للمشاة، وتبدأ بِعَدّ المركبات حتى تعبر أول شاحنة نقل. أوجِد احتمال أن تكون قد عدّت:

أ على الأكثر ثلاث مركبات.

ب على الأقل خمس مركبات.

٦) أي من المواقف الآتية يمثّل توزيعًا هندسيًا؟ وأيّها لا يمثّل؟ أوضح إجابتك.

أ يحتوي صندوق على حبّتَي تفاح حمراوَين، وعلى عدد كبير من حبّات تفاح خضراء. اختار طفل حبّة تفاح عشوائيًا وأكلها، واختار الحبّة الثانية وأكلها، وهكذا... المتغير س هو عدد حبّات التفاح التي اختارها الطفل وأكلها حتى اختار حبّة تفاح خضراء اللون.

ب يجلس طفل أمام حاسوب محمول على شاشته برنامج كتابة نصوص. س هو عدد المفاتيح التي نقرها حتى نقر أول مفتاح أكمل كلمة من ثلاثة أحرف ذات معنى.

ج المتغير س هو عدد مرات إسقاط حبّة أرزّ من ارتفاع مترَين على لوحة شطرنج، إلى أول مرة استقرت فيها هذه الحبّة على مربع أبيض في اللوحة.

د المتغير س هو عدد المرات التي شارك فيها رياضي في سباق الجري حتى ربح أول سباق.

٧) ليكن التوزيع الهندسي للمتغير العشوائي ط حيث $\frac{ل(ط = ٢)}{ل(ط = ٥)} = ١٥,٦٢٥$

أوجِد ل(ط = ٣)

٨) إذا علمت أن س ~ هندسي (ب)، ل(س ⩾ ٤) = $\frac{٢٣٨٥}{٢٤٠١}$، فأوجد ل(١ ⩽ س < ٤).

١٠-٤ التوقع للتوزيع الهندسي

تذكّر أن الوسط الحسابي لمتغير عشوائي منفصل على المدى الطويل للتجربة هو القيمة المتوقعة، ويرمز إليه ت(س) حيث ت(س) = $\sum$ س ل(س).

عند تطبيق ذلك على التوزيع الهندسي، نجد أن الوسط الحسابي يساوي $\frac{١}{ب}$ (مقلوب ب).

نتيجة ٥

إذا كان س ~ هندسي (ب) فإن: توقع س، ت(س) = $\frac{١}{ب}$



استكشف ٤

استخدم الجبر لتبرهن أن التوقع للتوزيع الهندسي يساوي $\frac{١}{ب}$.

للتوزيع س ~ هندسي (ب)، يكون س $\in$ {١، ٢، ٣، ٤، ...}، $ل_س$ = {ب، ب(١ - ب)، ب$(١ - ب)^٢$، ب$(١ - ب)^٣$، ...}.

الخطوة ١: تكوين معادلة تعبّر عن ت(س) بدلالة ب، (١ - ب). وباستخدام ت(س) = $\sum$ س ل(س).

الخطوة ٢: اضرب طرفَي المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة ١ في (١ - ب)

الخطوة ٣: اطرح إحدى المعادلتَين من الأخرى.

الخطوة ٤: إذا نجحت في التعامل مع الخطوات ١، ٢، ٣ فلن تحتاج إلى مساعدة لإكمال البرهان.

مثـــال ١٠

في ٢٥٪ من صناديق رقائق الذرة (cornflakes) توجد لعبة مجانية. ليكن المتغير العشوائي س هو عدد الصناديق التي يفتحها طفل حتى يفتح الصندوق الذي يحتوي أول لعبة.

أ أوجِد القيمة المتوقعة لـ س

ب فسّر ما تعنيه القيمة التي وجدتها في الجزئية (أ).

الحـــلّ:

أ ت(س) = $\frac{١}{ب}$ = $\left(\frac{١}{٤}\right)^{-١}$ = ٤ .... المتغير هو س ~ هندسي $\left(\frac{١}{٤}\right)$.

ب قد يجد الطفل أول لعبة في أول صندوق يفتحه، لكن في المتوسط سيجد الطفل لعبته الأولى في الصندوق الرابع الذي يفتحه.

مثـــال ١١

يتبع المتغير س التوزيع الهندسي. إذا علمت أن ت(س) = $٣\frac{١}{٢}$، فأوجِد ل(س > ٦).

الحـــلّ:

ت(س) = $\frac{١}{ب}$ .... أوجِد المتغير ب أولًا، ثم أوجِد (١ − ب)

التعويض عن ت (س) بـ $\left(\frac{٧}{٢}\right)$ = $\frac{١}{ب}$ = $\frac{٢}{٧}$

ب = $\frac{٢}{٧}$ .... من خلال ضرب الوسطين في الطرفين

(١ − ب) = ١ − $\frac{٢}{٧}$ = $\frac{٥}{٧}$

ل(س > ٦) = $(١ - ب)^{٦}$ .... استخدم ل(س > ر) = $(١ - ب)^{ر}$، نتيجة ٤

= $\left(\frac{٥}{٧}\right)^{٦}$

= ٠,١٣٣

مثـــال ١٢

إذا علمت أن س ~ هندسي (ب) وأن ل(س ⩽ ٣) = $\frac{٨١٩}{١٣٣١}$، فأوجد:

أ ل(س > ٣)

ب ل(١ < س ⩽ ٣)

الحـــلّ:

أ ل(س > ٣) = ١ − ل(س ⩽ ٣)

= ١ − $\frac{٨١٩}{١٣٣١}$

= $\frac{٥١٢}{١٣٣١}$

ب ١ − $(١ - ب)^{٣}$ = ل(س ⩽ ٣) .... استخدم ١ − $(١ - ب)^{ر}$ = ل(س ⩽ ر)، لإيجاد ب، (١ − ب)

$(١ - ب)^{٣}$ = ١ − $\frac{٨١٩}{١٣٣١}$

(١ − ب) = $\sqrt[٣]{١ - \frac{٨١٩}{١٣٣١}}$

١ − ب = $\frac{٨}{١١}$

∴ ب = $\frac{٣}{١١}$

ل(١ < س ⩽ ٣) = ل(س = ٢) + ل(س = ٣)

$= ب \times (١ - ب) + ب \times (١ - ب)^{٢}$

$= \frac{٤٥٦}{١٣٣١} \approx ٠,٣٤٣$

طريقة بديلة:

يمكنك أن تستخدم ل(١ < س ⩽ ٣) = ل(س ⩽ ٣) - ل(س = ١)

$= \frac{٨١٩}{١٣٣١} - \frac{٣}{١١}$

$= \frac{٤٥٦}{١٣٣١}$



تمارين ١٠-٤

١) إذا علمت أن س ~ هندسي (٠,٣٦) ، فأوجِد قيمة ت(س) في أبسط صورة.

٢) توزيع المتغير العشوائي ص هو توزيع هندسي، إذا علمت أن ل(ص = ١) = ٠,٢، فأوجِد ت(ص).

٣) إذا علمت أن ف ~ هندسي (ب)، و ت (ف) = $٤\frac{١}{٢}$، فأوجِد قيمة ل(ف = ٢).

٤) ليكن ط عدد مرات رمي قطعة نقود منتظمة، حتى ظهرت كتابة لأول مرة. أوجِد الوسط الحسابي لـ ط.

٥) ليكن س عدد مرات رمي حجر نرد منتظم، حتى ظهر العدد ٦ لأول مرة. أوجِد:

أ ت (س)

ب ل(س > ت (س))

٦) حجر نرد غير منتظم له ٤ وجوه مرقمة (١، ٣، ٥، ٧). احتمال ظهور كل رقم متناسب مع ذلك العدد (أي ل (س = ١) = $\frac{١}{ك}$، ل (س = ٣) = $\frac{٣}{ك}$، وهكذا)

أ أوجِد عدد مرات رمي حجر النرد حتى ظهور أول عدد غير أوّلي.

ب أوجِد احتمال أن ظهور أول عدد أوّلي في الرمية الثالثة.

٧) أظهرت دراسة وجود خلل في جين معيّن عند ٠,٢٪ من الناس، س هو عدد الأشخاص الذين اختيروا عشوائيًا حتى ظهر أول شخص يحمل الجين الذي فيه خلل. إذا علمت أن ل(س ⩽ ك) > ٠,٨٦٥، فأوجِد:

أ ت(س)

ب أقل قيمة ممكنة لـ ك

٨) يلعب أنور، وزيد لعبة يتبادلان فيها رمي قطعة نقود منتظمة. أول لاعب تُظهر رميته الصورة يكون هو الرابح. يرمي أنور قطعة النقود أولًا، واحتمال أن يربح اللعبة هو $(٠,٥)^{١} + (٠,٥)^{٣} + (٠,٥)^{٥} + (٠,٥)^{٧} + ...$

أ صِف في جدول سلسلة النتائج حتى القيمة $(٠,٥)^{٥}$

ب أوجِد بصورة مشابهة احتمال أن يربح زيد اللعبة.

ج أوجِد احتمال أن يربح أنور اللعبة.



قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- يمكن استخدام توزيع ذي الحدَّين لتمثيل عدد النجاحات في سلسلة محاولات مكررة ومستقلة عددها ن، حيث احتمال النجاح في كل محاولة ثابت ب
  - إذا كان س ~ ث (ن، ب) فإن ل(ر) = $\binom{ن}{ر}$ ب^{ر}(١ − ب)$^{ن - ر}$
  - ت(س) = ن ب
  - ع^{٢}(س) = ن ب(١ − ب)
- يمكن استخدام التوزيع الهندسي لتمثيل عدد المحاولات حتى حدوث أول نجاح في سلسلة محاولات مكررة ومستقلة حيث احتمال النجاح في كل محاولة ثابت ب.
  - لنفترض أن س ~ هندسي (ب) فإن ل(ر) = ب(١ − ب)$^{ر - ١}$، ر = ١، ٢، ٣، …
  - ل(س ⩽ ر) = ١ − (١ − ب)^{ر}، و ل(س > ر) = (١ − ب)^{ر}
  - ت (س) = $\frac{١}{ب}$

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة العاشرة

١) إذا علمت أن س ~ ث $\left(ن، \frac{١}{ن}\right)$، فأوجد ل(س = ١) بدلالة ن.

٢) حجزت عائلة لإجازة طويلة في مدينة ما حيث احتمال أن يتساقط المطر في أيّ يوم ٠,٣ أوجد احتمال أن:

أ تمطر أول مرة في اليوم الثالث من الإجازة. ب أن لا تمطر في أول أسبوعَين من الإجازة.

٣) يُعطى رجل آلي مصنوع من البلاستيك كهدية مجانية داخل كل صندوق بسكويت من نوع معيّن. يوجد أربعة ألوان للرجل الآلي هي: الأحمر، الأصفر، الأزرق، والأخضر. وكل لون له فرصة الحدوث نفسها. اشترى عيسى بعض صناديق البسكويت هذه. أوجِد احتمال أن:

أ الصندوق الأول يحتوي على رجل آلي أخضر اللون.

ب يحصل على أول رجل آلي أخضر اللون عندما يفتح الصندوق الخامس.

ج موسى صديق عيسى يجمع أيضًا مثل هذه الرجال الآلية، أوجِد احتمال وجود رجال آليين بأربعة بألوان مختلفة في أول أربعة صناديق يفتحها موسى.

٤) لدى محمد قرصان مثلثا الشكل منتظمان. رقمت أجزاء القرص الأول بالأرقام ١، ٢، ٣، ورقّمت أجزاء القرص الثاني بالأرقام ٢، ٣، ٤. دوّر محمد القرصَين معًا، وقرأ الرقمَين الظاهرَين عند توقفهما.

أ أوجد احتمال أن يكون الفرق بين هذَين الرقمَين هو ١

ب دوّر محمد القرصَين معًا ١٥مرة. أوجِد احتمال أن لا يكون الفرق بين الرقمَين ١ في ثماني أو تسع محاولات من المحاولات الـ ١٥

٥) يولّد حاسوب أعدادًا عشوائية باستخدام الأرقام ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩. تظهر الأعداد على الشاشة بتجمعات كل منها من خمسة أرقام، مثل: ٥٠١١٩ ؛ ٢٦٣١٧ ؛ ٤٠٠٦٨ .....
أوجِد احتمال أن:

أ لا يوجد الرقم ٧ في أول تجمع.

ب أول صفر يظهر في أول تجمع.

ج أول تسعة تظهر في التجمع الثاني.

٦) رُمي أربعة أحجار نرد منتظمة.

أ بكم طريقة يكون مجموع الأعداد الأربعة الظاهرة يساوي ٢٢؟

ب أوجِد احتمال أن يكون مجموع الأعداد الأربعة الظاهرة يساوي ٢٢

ج رُميت أحجار النرد الأربعة ثماني مرات. أوجِد احتمال أن يكون مجموع الأعداد الأربعة الظاهرة يساوي ٢٢ في رميتَين على الأقل.

٧) عندما يوقف سائق سيارته مساءً، فإن فرصة تذكر أو نسيان إطفاء الأضواء تكون هي نفسها لديه. أوجِد احتمال أنه في الـ ١٦ مرة القادمة، سينسى إطفاء الأضواء عند إيقاف سيارته. أعطِ إجابتك في أبسط صورة:

أ ١٤ مرة أكثر ممّا يتذكّر. ب على الأقل ١٢ مرة أكثر ممّا يتذكّر.

٨) تراقب جميلة طلبة الجامعة. تشير البيانات إلى أن ٦٠٪ من االذكور و٧٠٪ من الإناث يضعون سمّاعات الهاتف في كلّ الأوقات. قررت أن تقابل بعض الطلبة المختارين عشوائيًا، من الذكور والإناث بالتناوب.

أ استخدم بيانات جميلة لتجد احتمال أن يكون أول طالب لا يضع سماعة هو ثالث ذكر تمت مقابلته، إذا علمت أنها أول من قابلت هو:

١) ذكر ٢) أنثى ٣) ذكر يضع سماعة.

ب اكتب فرضية حول الذين يضعون سماعات من خلال إجابتك في الجزئية (أ).

٩) قدّر ١٣٪ من الزبائن أن الطعام في أحد المطاعم 'غير جيد'، و ٢٢٪ قدّروا أن الطعام 'مناسب'، و٦٥٪ قدّروا أن الطعام 'جيد'. أُخذت عيّنة عشوائيًا من ١٢ زبونًا من الذين يرتادون المطعم.

أ أوجِد احتمال أن يكون أكثر من ٢ وأقل من ١٢ قدّروا أن الطعام "جيد".

ب في مناسبة منفصلة اِختيرت عيّنة عشوائيًا من ن زبونًا يرتادون المطعم. أوجِد أقل قيمة لـ ن بحيث يساوي احتمال وجود شخص واحد على الأقل يقدر الطعام 'غير جيد'، أكثر من ٠,٩٥

١٠) احتمالية ظهور الصورة عند رمي حجر نرد غير منتظم تساوي أربعة أمثال ظهور الكتابة. إذا رُميت قطعة النقود ك مرة بحيث يكون احتمال ظهور الكتابة مرة واحدة على الأقل هو ٩٩٪، فأوجِد أقل قيمة ممكنة لـ ك.

١١) إذا علمت أن س ~ ث (ن، ٠,٤)، ل(س = ١) = ك × ل (س = ن − ١)، فعبّر عن الثابت ك بدلالة ن، وأوجد أقل قيمة لـ ن التي يكون عندها ك > ٢٥

١٢) لاحظت دار نشر أن صفحة واحدة على الأقل من ثماني صفحات تحتوي على خطأ إملائي، وصفحة واحدة على الأقل من خمس صفحات تحتوي على خطأ ترقيم، وأن هذه الأخطاء تحدث بشكل مستقلّ وعشوائي.
اختبرت دار النشر ٤٨٠ صفحة عشوائيًا اختيرت من كتب مختلفة لملاحظة الأخطاء.

أ كم صفحة تتوقع أن تحتوي على الأقل خطأً واحدًا من كل نوع من الخطأَين؟

ب أوجِد احتمال أن:

١) يحدث أول خطأ إملائي بعد الصفحة العاشرة.

٢) يحدث أول خطأ ترقيم قبل الصفحة العاشرة.

٣) الصفحة العاشرة هي الأولى التي تحتوي على نوعَي الخطأ.

١٣) يستخدم سلمان الحاسوب ليولد ٥ أعداد صحيحة من ١ إلى ٩

أ أوجِد احتمال أن يكون على الأقل اثنان من الأعداد الصحيحة الخمسة أقل من أو يساوي ٤

ب أنتج سلمان ن عددًا صحيحًا عشوائيًا من ١ إلى ٩، المتغير العشوائي س هو عدد الأعداد الصحيحة ن الأقل من أو تساوي العدد الصحيح ك من ١ إلى ٩. إذا علمت أن الوسط الحسابي للمتغير س هو ٩٦ وتباين س هو ٣٢ فأوجِد قيمة كل من ن، ك.